COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

PROBLEME I

Dans tout le problème E désigne un $\mathbb{C}$ - espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$; I_E désigne l'application identique de E et $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E ; O_E désigne l'application nulle de E .

I - 1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E tel que
$\forall x \in F , \exists \lambda_x \in \mathbb{C} , u(x) = \lambda_x x$.
Montrer que F est un sous-espace d'un sous-espace propre de u .

2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, $\forall x \in E$, $u^2(x) - u(x)$ et $u(x) - x$ sont liés si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que

$$u^2 - (k+1)\,u + k\,I_E = 0 \qquad (1) .$$

II - Dans cette partie on suppose $k = 1$ et u désigne un endomorphisme de E vérifiant la relation (1).

1) Montrer que u est un automorphisme. Quelles sont les valeurs propres de u ?
u est-il diagonalisable ? Comparer $\dim \operatorname{Ker}(u - I_E)$ à $\frac{n}{2}$.

2) Montrer que si p et q sont des projecteurs de E , on a $p \circ q = p$ si, et seulement si, $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$ et $p \circ q = q$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$.

3) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v^2 = v \circ v = O_E$ si, et seulement si, il existe deux projecteurs p et q de E vérifiant $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$, avec $v = p - q$, et en déduire que $u = p + q_1$ où p et q_1 sont deux projecteurs de E vérifiant $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q_1$.

4) On suppose que $\dim \operatorname{Ker}(u - I_E) = n - 1$.

a) Montrer qu'il existe une base $B = (e_1, \ldots , e_n)$ de E telle que

$$\forall i , 1 \leqslant i \leqslant n-1 , u(e_i) = e_i , u(e_n) = e_1 + e_n .$$

b) Déterminer les sous-espaces de E stables par u .

c) On note $L(u) = \{ f \in \mathcal{L}(E) , u \circ f = f \circ u \}$.
Montrer que L(u) est un sous-espace vectoriel de E et donner sa dimension en fonction de n.

page 230 2/b - 1992 .
E. S. T. P Composition

III- Dans cette partie on suppose $k \neq 1$; $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Si u vérifie la relation (1), u est-il diagonalisable ?
2) Montrer que u vérifie la relation (1) si, et seulement si, il existe un projecteur p de E tel que $u = (1 - k)\, p + k\, I_E$.

3) Soient p et q deux projecteurs de E tels que $\text{Im } p = \text{Im } q$.
On pose $u = (1 - k)\, p + k\, I_E$ et $u' = (1 - k')\, q + k'\, I_E$, $k' \in \mathbb{C}$, $k' \neq 1$.
Etudier $u \circ u'$.

PROBLEME II

Soit l'équation différentielle

(E) $(1 + x^2)\, y'' + xy' - K^2 y = 0$, $K \in \mathbb{R}^*_+$

1) Soit φ une solution de (E) définie sur R et $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = \varphi(\text{sh}t)$.
   a) Montrer que ψ est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, (E'). Donner les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E').

   b) Soit f la solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.
   Déduire de a) une représentation paramétrique de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) a) Donner les tableaux de variations de la représentation paramétrique définie au 1) b) en distinguant les cas $0 < K < 1$, $K = 1$, $K > 1$.

   b) Préciser la tangente aux courbes représentatives au point I (0, 1) et étudier la concavité en ce point.
   Quel est le rayon de courbure en ce point ? Donner une équation du cercle osculateur en ce point.

   c). Préciser la nature et les asymptotes de la courbe obtenue pour $K = 1$. Etudier les branches infinies des courbes obtenues pour $0 < K < 1$ et pour $K > 1$.
   Etudier l'intersection éventuelle des courbes avec l'axe des abscisses du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Tracer les courbes correspondant aux trois cas envisagés pour K dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Trouver les solutions de (E) développables en série entière autour de l'origine ; préciser le rayon de convergence. Etudier le cas où $K \in \mathbb{N}^*$.